Torodd F. Ottestad
@lektorodd

Eksamen 2P-Y våren 2024

24.05.2024

Del 1

Oppgåve 1

Sjekkar prisen per sjokolade for dei ulike variantane av plakatane i kiosken.

Tal sjokoladar	2	8	16	24
Totalpris	25	100	200	300
Pris per sjokolade	12.5	12.5	12.5	12.5

Oppgåva spør om talet på sjokoladar du kjøper, og prisen du betaler for kvar sjokolade er proporsjonale storleikar. Då skulle

$$\frac{\text{pris per sjokolade}}{\text{tal sjokoladar}} = \text{konstant}$$

Me ser her at

$$\frac{\text{totalpris}}{\text{tal sjokoladar}} = 12.5 \quad (\text{konstant})$$

Dvs. talet på sjokoladar du kjøper og **totalprisen** er proporsjonale storleikar.

Oppgåve 2

Nora kan velja mellom 2 for 32 kr eller 4 for 48 kroner. Prisen per bagett er henholdsvis 16 kr og 12 kr.

$$\frac{\text{endring}}{\text{utgangspunkt}} = \frac{16-12}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Prisen blir 25 % lågare per bagett dersom ho kjøper fire bagettar i staden for to.

Alternativ løysing med vekstfaktor

$$\begin{aligned} \text{startverdi} \cdot \text{vekstfaktor} &= \text{sluttverdi} \\ \text{vekstfaktor} &= \frac{\text{sluttverdi}}{\text{startverdi}} \\ \text{vekstfaktor} &= \frac{12}{16} = 0.75 \end{aligned}$$

Vekstfaktor på 0.75 svarar til ein reduksjon på 25 %.

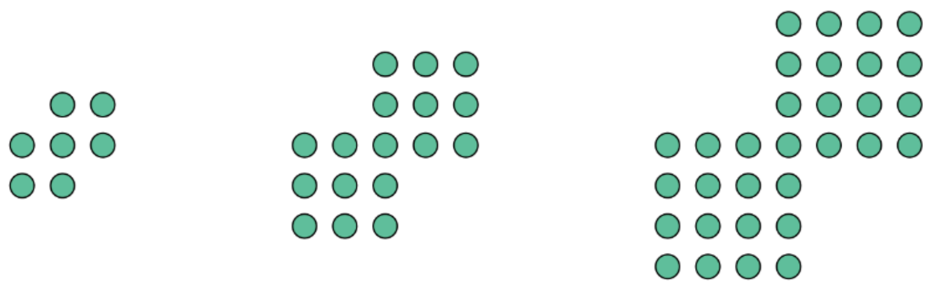
Oppgåve 3

Reknar ein månad som 30 dagar for å gjera utrekninga litt trivelegare enn med 31

$$\begin{aligned} 700000 \cdot 150 \cdot 30 &= 700000 \cdot 4500 \\ &= 7 \cdot 10^5 \cdot 4.5 \cdot 10^3 \\ &= 31.5 \cdot 10^8 \\ &= 3.15 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

700 000 mennseke med eit snittforbruk på 150 liter vatn kvart døgn vil i løpet av ein månad bruka $3.15 \cdot 10^9$ liter vatn.

Oppgåve 4



Figur 1 Figur 2 Figur 3

Litt rar rekkefølge på oppgåvene kanskje. Spørsmål a) og b) heng saman, og det er nok like greit å starte med b) her og bruke resultatet i a)... Det vil spara oss for mykje tid (å teikna figur 9 vil ta både tid og plass)

b) Ser at i figur 1 har me to kvadrat med sidelengd 2 små sirklar. Dei to kvadrata har ei kule felles. Demed er det $4 + 4 - 1 = 7$ små sirklar i figur 1.

I figur to er det to kvadrat med sidelengd 3 små sirklar. Framleis er det ei kule felles. Det er $9 + 9 - 1 = 17$ små sirklar i figur 2.

Dette mønsteret gjentek seg i figur 3.

Figur, n	**Tal små sirklar**, $F(n)$
1	$2 \cdot (1+1)^2 - 1$
2	$2 \cdot (2+1)^2 - 1$
3	$2 \cdot (3+1)^2 - 1$
n	$2 \cdot (n+1)^2 - 1$

Det vil vera $F(n) = 2 \cdot (n+1)^2 - 1$ små sirklar i figur n.

a) Finn kor mange små sirklar det er i figur 4 og 9.

$F(4) = 2 \cdot (4+1)^2 - 1 = 2 \cdot 5^2 - 1 = 2 \cdot 25 - 1 = 49$
Altså 49 små sirklar i figur 4.

$F(9) = 2 \cdot (9+1)^2 - 1 = 2 \cdot 10^2 - 1 = 2 \cdot 100 - 1 = 199$
Altså 199 små sirklar i figur 9.

Del 2

Oppgåve 1

Modell for prisen $H(x)$ i kr kvar av vennene må betale i leige dersom x venner blir med på hytteturen er gitt ved

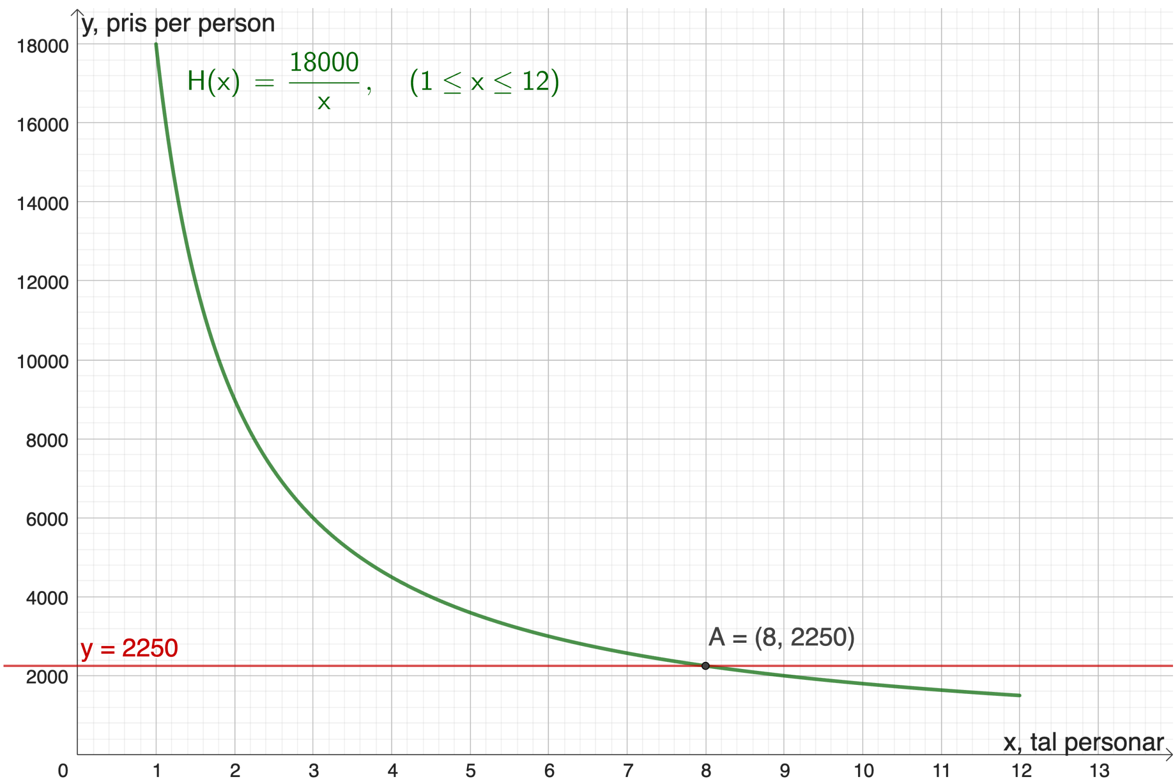
$$H(x) = \frac{18000}{x} \quad , \quad 1 \leq x \leq 12$$

a) Ut frå modellen ser me at dersom ein person skal leige hytta ville prisen vore

$$H(1) = \frac{18000}{1} = 18000$$

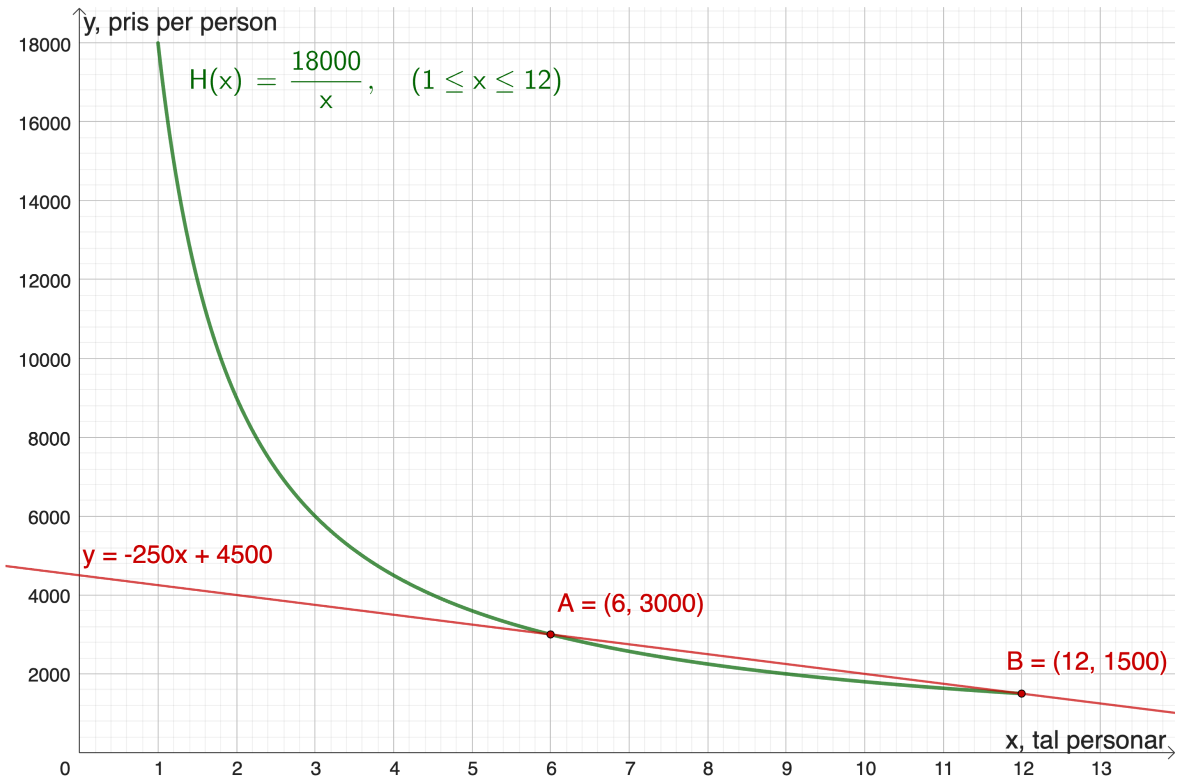
Prisen for å leige hytta er altså 18 000 kr, fordelt på så mange som er med på turen. I tillegg ser me frå definisjonsmengden at det største talet på venner som kan vere med på turen er 12, noko som kan bety at hytta har 12 sengeplassar.

b) Teikner funksjonen i GeoGebra. Teiknar og inn linja $y = 2250$ og bruker "skjæring mellom to objekt" for å finna det aktuelle skjæringspunktet.



Skjæringspunktet (A) er $(8, 2250)$, som vil seie at dersom 8 venner er med på turen vil kvar av dei måtte betale 2250 kr.

c) Bruker GeoGebra. Markerer punkta $(6, H(6))$ og $(12, H(12))$ og teikner linja mellom dei.



Linja har funksjonsuttrykket $y = -250x + 4500$ og med det stigningstalet -250. Stigningstalet fortel oss at prisen per person vil gå ned med 250 kr for kvar ekstra person som er med på turen når ein aukar frå 6 til 12 personar.

Oppgåve 2

a) Bruker CAS:

$$5.4 - 5.15 \approx 0.25$$

$$\frac{5.4}{5.15} \approx 1.049$$

Ser at renta er 0.25 prosentpoeng høgare (linje 1) og ca. 4.9% høgare (linje 2) dersom ho vel å binde pengane i 1 år i staden for 3 månader.

b) Ut frå opplysingane i oppgåveteksten vil Malin få 5.4% rente på sparebeløpet sitt om ho vel å binde pengane i 1 år. Bruker CAS og finn 5.4% av 450 000 kr.

$$450000 \cdot 0.054 \approx 24300$$

Malin vil få 24 300 kr i renteinntekter dersom ho vel å binde pengane i 1 år.

Oppgåve 3

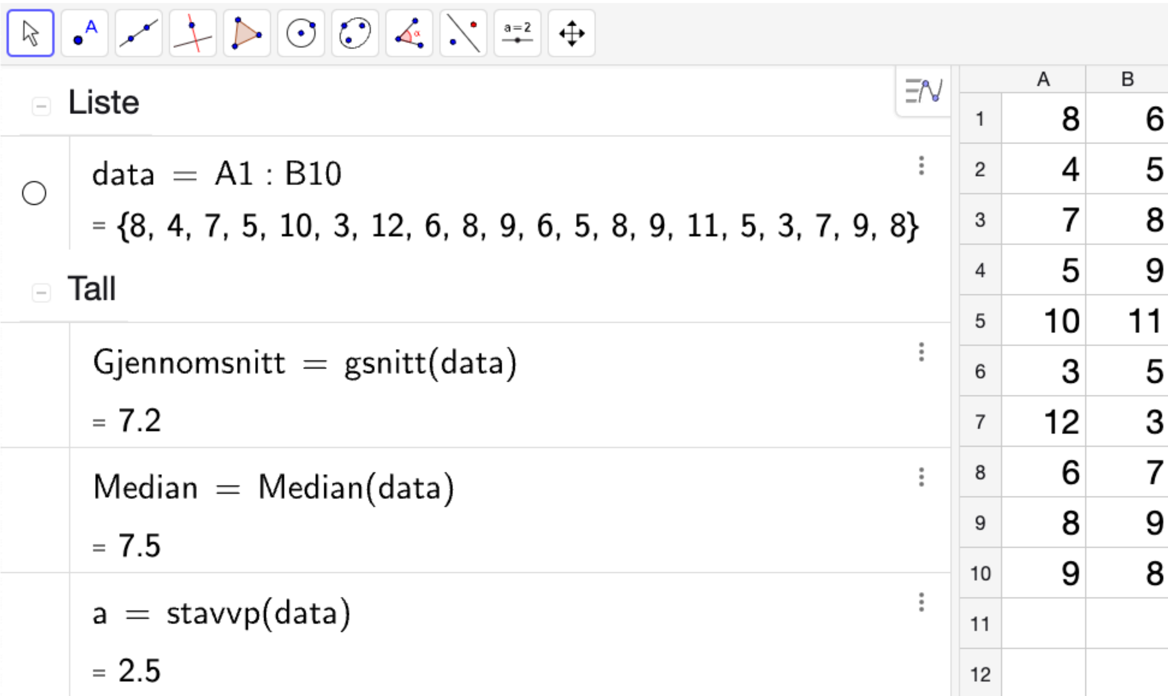
Turane til Solveig:

8	4	7	5	10	3	12	6	8	9
6	5	8	9	11	5	3	7	9	8

Miriam:

- Gjennomsnitt: 4.7 timar per tur
- Median: 4 timar
- Standardavvik: 4.2 timar

a) Reknar ut gjennomsnitt, median og standardavvik for Solveig sine turar i GeoGebra.



Solveig sine turar:

- Gjennomsnitt: 7.2 timar per tur
- Median: 7.5 timar
- Standardavvik: 2.5 timar

Ut frå desse opplysingane ser me at Solveig i snitt går lengre turar. Standardavviket fortel at det er større variasjon i turane til Miriam enn til Solveig.

Miriam har eit gjennomsnitt som er høgare enn medianen, som tyder på at det er nokre lange turar som drar opp gjennomsnittet. Solveig har eit gjennomsnitt som er lågare enn medianen, som tyder på at det er nokre korte turar som drar ned gjennomsnittet.

b) Ser på dei to påstandane kvar for seg.

1) Miriam og Solveg gjekk 3 skiturar på 5 timar saman

Av tabellen med kumulative frekvensar ser me at 11 av turane var 3 timar eller kortare. Me ser også at 14 av turane var 5 timar eller kortare. Dette vil seie at det er 3 turar som var 5 timar lange.

Påstanden stemmer

2) Miriam var ikkje med alle gongane Solveig gjekk ein skitur på 8 timar

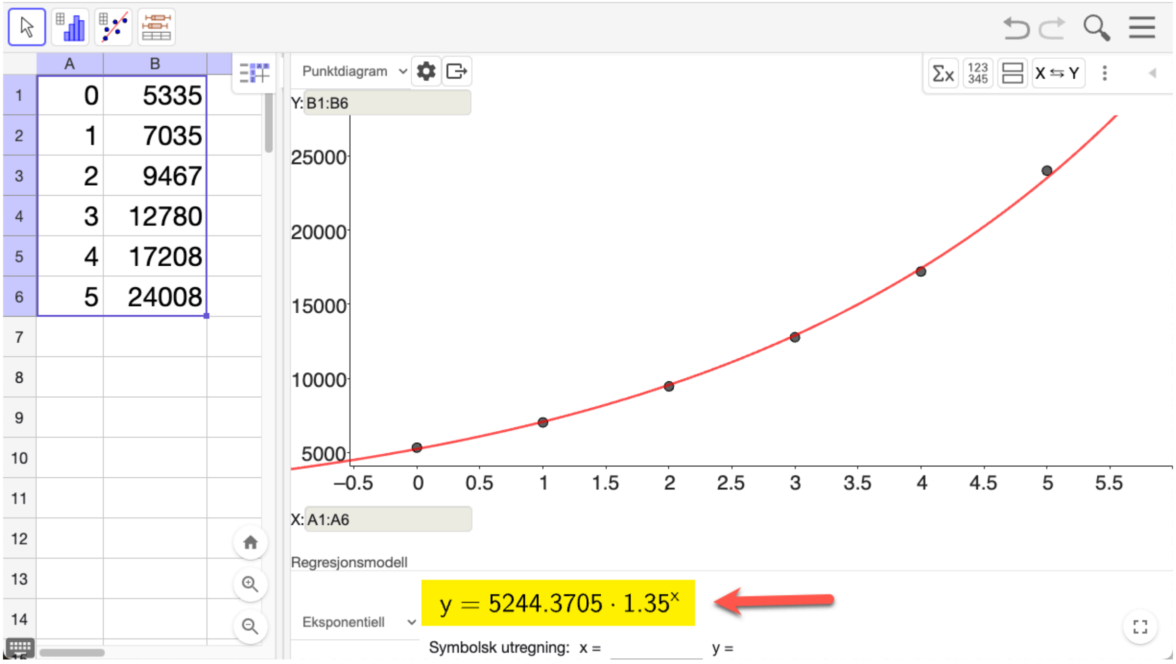
Av tabellen ser me at dei har gått $17 - 14 = 3$ turar på 8 timar saman. Samtidig veit me frå oppgåve a) at Solveig har gått 4 turar på 8 timar. Dette vil seie at Miriam ikkje har vore med alle gongane Solveig har gått ein skitur på 8 timar.

Påstanden stemmer

Oppgåve 4

a) Lar x vera talet på månader etter november 2023. Skriv inn i reknearket i Geogebra med x i kolonne A og tal følgjarar i kolonne B.

Markerer cellene i tabellen og vel "Regresjonsanalyse". Sidan det er snakk om prosentvis vekst vel me "Eksponentiell".



Ser at vekstfaktoren i funksjonsuttrykket er 1.35 som vil seie at talet på følgjarar aukar med 35% kvar månad.

b) Ser på kva som skjer med 5 prosentpoeng auke i tal følgarar per månad etter april 2024.

	A	B	C
1	**Vekst før april**	35 %	
2	**Auke pr. mnd**	5 %	
3			
4	**Månad**	**Følgarar**	**Vekstfaktor**
5	April	24 008	1,35
6	Mai	33 611	1,40
7	Juni	48 736	1,45
8	Juli	73 104	1,50
9	August	113 312	1,55

	A	B	C
1	**Vekst før april**	0,35	
2	**Auke pr. mnd**	0,05	
3			
4	**Månad**	**Følgarar**	**Vekstfaktor**
5	April	24008	=1+B1
6	Mai	=B5*C6	=C5+B$2
7	Juni	=B6*C7	=C6+B$2
8	Juli	=B7*C8	=C7+B$2
9	August	=B8*C9	=C8+B$2

Ser at talet på følgjarar vil vera 33 611 i mai og 48 736 i juni dersom Tuva klarar å nå målet sitt.

c) Finn ut kor mange følgarar Tuva ville hatt i august 2024 dersom veksten hadde vore 35% vidare. Ser vidare på kor mange prosent fleire følgarar det nye målet ville gitt framfor den opphavlege veksten.

1	$24008 \cdot 1.35^4$
	$\approx$ **79742.72**
2	$\frac{113312}{79743}$
	$\approx$ **1.42**

Tuva ville hatt ca. 42% fleire følgarar i august 2024 dersom ho hadde nådd det nye målet sitt.

Oppgåve 5

I histogrammet er frekvensen lik arealet av søylene ($\text{klassebreidd} \cdot \text{høgd}$). Dermed kan me skriva inn opplysingane i histogrammet til ein tabell:

Klasse	**Frekvens**
$[0, 40\rangle$	$40 \cdot 2 = 80$
$[40, 60\rangle$	$20 \cdot 6 = 120$
$[60, 100\rangle$	$40 \cdot 5 = 200$
$[100, 150\rangle$	$50 \cdot 2 = 100$

Til saman på skulen er det då $80 + 120 + 200 + 100 = 500$ elevar.

Går gjennom dei ulike påstandane:

Påstand 1: 80 elevar brukte mindre enn 40 minutt på lekser denne ettermiddagen.

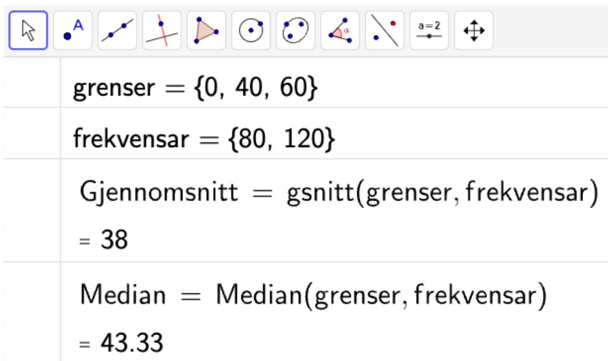
Ser av frekvenstabellen at påstanden stemmer.

Påstand 2: Den relative frekvensen for 100-150 minutt brukter på lekser er $\frac{1}{5}$.

Ser av frekvenstabellen at det er 100 elevar som brukte 100-150 minutt på lekser. Dette er 1/5 av 500 elevar, så påstanden stemmer.

Påstand 3: Elevane som brukte mindre enn 60 minutt på leksene, brukte i gjennomsnitt 38 minutt.

Legg inn klassegrenser og frekvenser i Geogebra og finn gjennomsnittet.



Gjennomsnittet er 38 minutt så påstanden stemmer.

Påstand 4: For elevane som brukte mindre enn 60 minutt på leksene, er medianen for talet på minutt høgare enn gjennomsnittet for talet på minutt.

Ser av utrekningane over at medianen er ca. 43 minutt så påstanden stemmer.

Oppgåve 6

Ser på dei ulike delane av programkoden:

```
innskudd = 27500
prosent_rente = 6.8
BSU = 0
```

Her vert variablane definert. Innskuddet er 27 500 kr, renta er 6.8% og startverdien for BSU-kontoen er 0 kr.

```
for år in range(2024, 2034):
```

Dette betyr at den indenterte koden (dei fire siste linjene) skal gjenta seg for alle år frå og med 2024 til og med 2033, altså 10 gonger.

```
    BSU = BSU + innskudd
    renter = prosent_rente * BSU / 100
    BSU = BSU + renter
    print(år, round(renter), round(BSU))
```

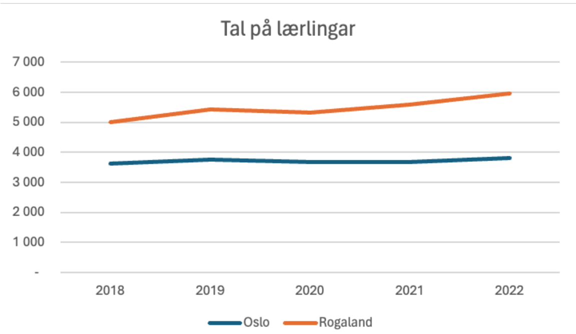
Dette er koden som vert repetert 10 gongar. Her vert BSU-kontoen oppdatert med innskuddet, renteinntektene vert rekna ut, renteinntektene vert lagt til BSU-kontoen. I siste linje vert årstal, renteinntekt (avrunda) og beløpet på BSU-kontoen (avrunda) det aktuelle året skrive ut.

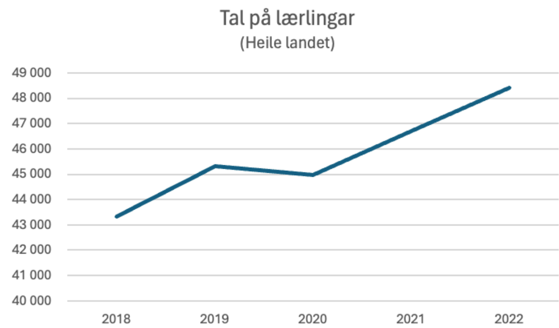
Oppgåve 7

	2018	2019	2020	2021	2022
Oslo	3 626	3 757	3 685	3 688	3 799
Rogaland	5 009	5 432	5 324	5 589	5 960
Noreg	43 322	45 323	44 961	46 705	48 400

Vil laga ein presentasjon som skal ha med berekningar og diagram. Det kan vera aktuelt å laga ulike diagram.

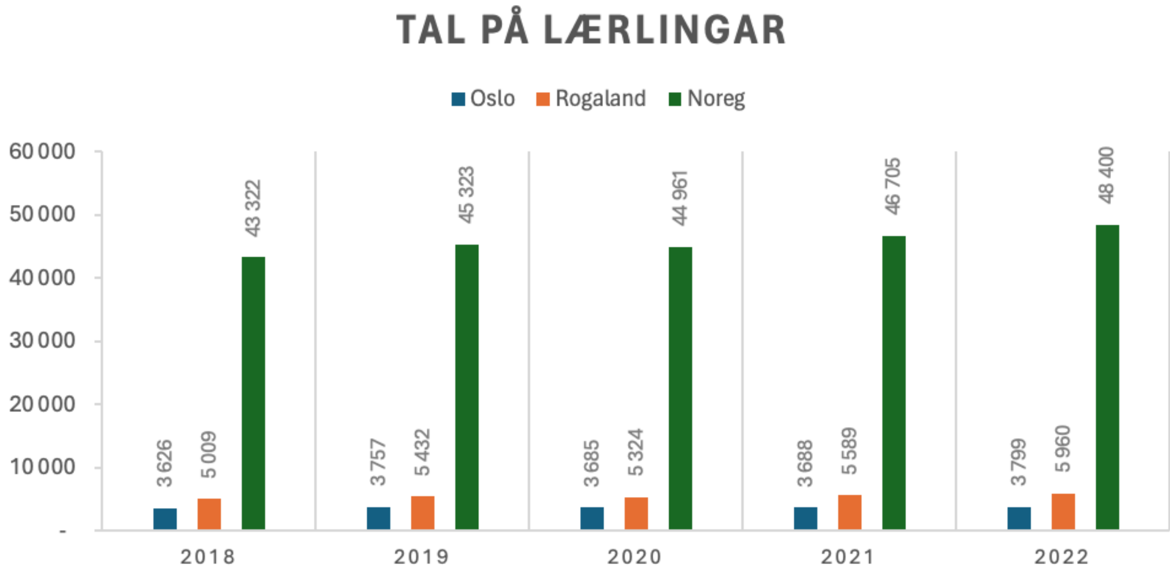
Startar med å laga linjediagram som viser utviklinga i talet på lærlingar i dei to fylka, og i heile landet.





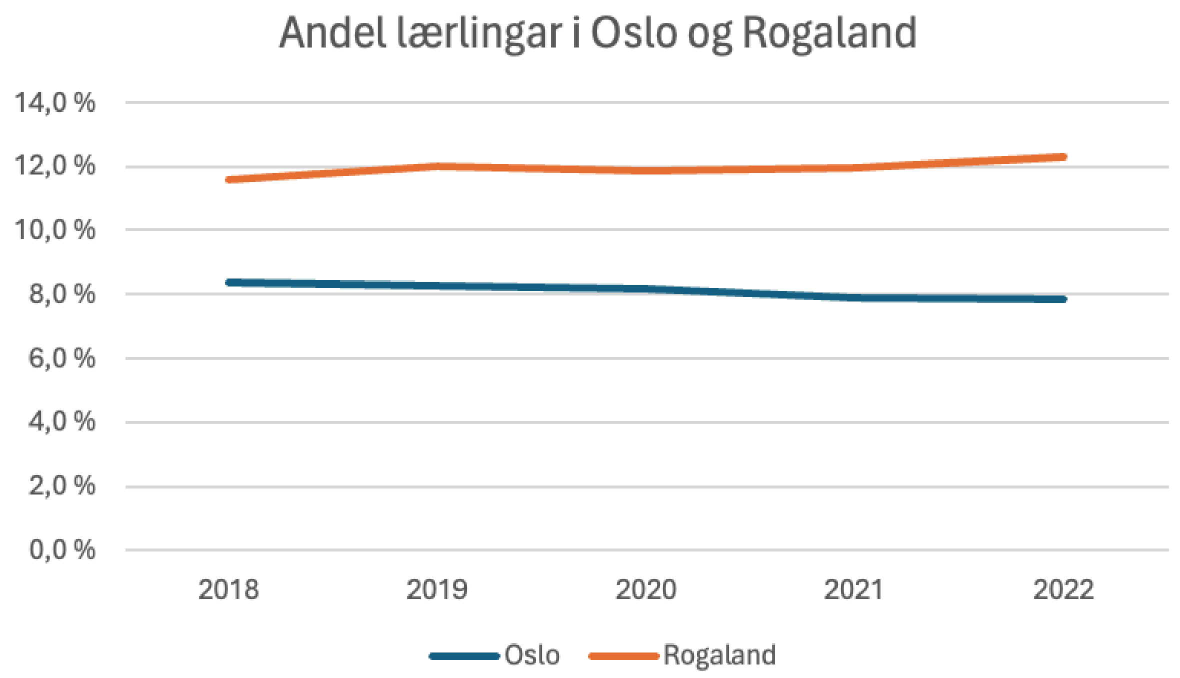
Her ser me at det tilsynelatande er ganske stabilt med lærlingar i Oslo, medan det er ein jamn vekst i talet på lærlingar i Rogaland og i heile landet. Legg merke til at y-aksen startar i 40 000 i det siste diagrammet for å betre synleggjera veksten.

Vidare kan me laga eit stolpediagram for å sjå om det går an å presentera tala frå dei to fylka og heile landet på ein annan måte.



Her får ein betre fram kor stor del av lærlingane i Noreg som er i Oslo og Rogaland, men endringa tala er ikkje like tydeleg som i linjediagramma.

Sidan dei absolutte tala i både fylka og i landet endrar seg over tid kan me laga eit linjediagram som viser kor stor prosentdel av lærlingane i Noreg som er i Oslo og Rogaland i perioden.



Her ser me at Oslo i løpet av perioden får ein stadig mindre del av lærlingane i Noreg sjølv om talet på lærlingar aukar. Rogaland får ein større del av lærlingane, i tillegg til den absolutte auken i talet på lærlingar.

Utrekning for prosentdelen:

	A	B	C	D	E	F
1		**2018**	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**
2	**Oslo**	3 626	3 757	3 685	3 688	3 799
3	**Oslo (%)**	8,4 %	8,3 %	8,2 %	7,9 %	7,8 %
4	**Rogaland**	5 009	5 432	5 324	5 589	5 960
5	**Rogaland (%)**	11,6 %	12,0 %	11,8 %	12,0 %	12,3 %
6	**Noreg**	43 322	45 323	44 961	46 705	48 400

	A	B	C	D	E	F
1		**2018**	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**
2	**Oslo**	3626	3757	3685	3688	3799
3	**Oslo (%)**	=B2/B6	=C2/C6	=D2/D6	=E2/E6	=F2/F6
4	**Rogaland**	5009	5432	5324	5589	5960
5	**Rogaland (%)**	=B4/B6	=C4/C6	=D4/D6	=E4/E6	=F4/F6
6	**Noreg**	43322	45323	44961	46705	48400

For å sjå på kor stor den nasjonale veksten av lærlingar er kan me gjera ei regresjonsanalyse i GeoGebra. Lagar ei liste med punkt med år etter 2018 og talet på lærlingar i Noreg. Finn ein eksponentiell modell som passar, med kommandoen `RegEksp()`

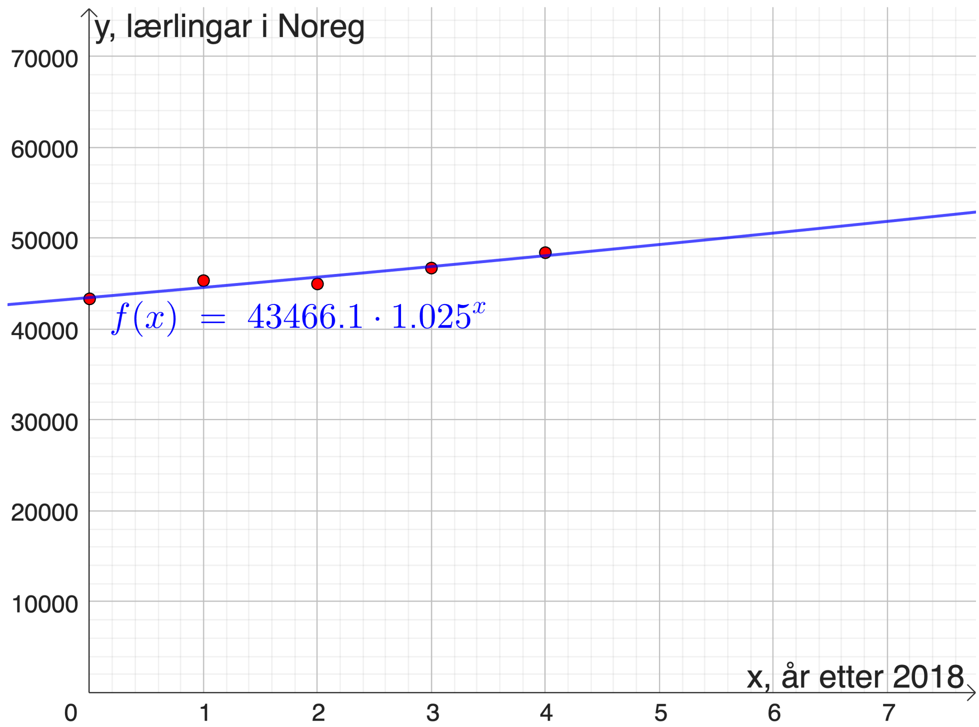
$\text{år} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\text{lærlingar} = \{43322, 45323, 44961, 46705, 48400\}$

$\text{data} = (\text{år}, \text{lærlingar})$
$= \{(0, 43322), (1, 45323), (2, 44961), (3, 46705), (4, 48400)\}$

$f(x) = \text{RegEksp}(\text{data})$
$= 43466.1 \cdot 1.025^x$

Her ser me at i perioden er den årlege auken i talet på lærlingar (nasjonalt) om lag 2,5%.
Datapunkta og modellen kan me plotta i GeoGebra:



Dette er eit utval diagram og berekningar som kan vera aktuelle for presentasjonen.